

# Introducción al Álgebra (12-1)

## Punto Control 1

P1 a)  $p, q, r$  son proposiciones.

i) Demostrar que  $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \not\equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$

Basta presentar valores que demuestren la NO equivalencia

Por ejemplo  $p \Leftrightarrow F \wedge r \Leftrightarrow F$  con  $q$  arbitrario y queda

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [F \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow V$$

$$\text{y } [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(F \Rightarrow q) \Rightarrow F] \Leftrightarrow V \Rightarrow F \Leftrightarrow F$$

2.0 y por lo tanto  $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \not\equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$ .

OBSERVACIÓN: También se puede optar por construir la tabla de cada expresión y probar la NO equivalencia.

ii) Demostrar, sin tablas que  $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

7.0 En efecto  $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\bar{p} \vee (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [\bar{p} \vee (\bar{q} \vee r)]$

2.0  $\stackrel{\text{Asociet}}{\Leftrightarrow} [(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r] \stackrel{\text{Morgan}}{\Leftrightarrow} [\overline{p \wedge q} \vee r] \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

b)  $\exists y [p(y) \Rightarrow (\forall x) p(x)]$  es Tautología.

0.5 En efecto: Si  $(\forall x) p(x)$  (verdadero) entonces  $(\exists y) p(y)$  es V y la proposición toma la forma  $(V \Rightarrow V) \Leftrightarrow V$

0.5 Si por el contrario  $(\exists y) p(y)$  es Falso, entonces  $\forall x [F \Rightarrow (\forall x) p(x)] \Leftrightarrow V$   
∴ La Proposición es TAUTOLOGÍA.



P.2 Sean  $A, B$  dos conjuntos cualesquiera.

a) Pruebe que  $\phi \notin P(A) \setminus P(B)$

Por contradicción, supongamos que  $\phi \in P(A) \setminus P(B)$ , entonces

$$\phi \in P(A) \wedge \phi \notin P(B) \Leftrightarrow \phi \subseteq A \wedge \phi \not\subseteq B \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F$$

por  $\phi \subseteq B \quad \forall B \in P(U)$

1.0  $\rightarrow$  Entonces  $\phi \notin P(A) \setminus P(B)$ .

b) Demuestre que  $P(A-B) \subseteq (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\phi\}$

Por (a) está claro que  $\phi \notin (P(A) \setminus P(B))$  pero  $\phi \in P(A-B)$  por

1.0, lo que  $\{\phi\}$  debe unirse al lado derecho de la inclusión.

Determinar: Sea  $X \in P(A-B) \Rightarrow X \subseteq A-B \Rightarrow X \subseteq A \wedge X \not\subseteq B$

$$\Rightarrow X \in P(A) \wedge X \notin P(B) \Rightarrow X \in (P(A) \setminus P(B))$$

2.0  $\rightarrow$  Sigue que  $P(A-B) \subseteq (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\phi\}$ .

c) Encontrar  $A$  y  $B$  tales que  $P(A-B) \neq (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\phi\}$

Por ejemplo  $A = \{1, 2\} \wedge B = \{2, 3\}$

1.0  $\rightarrow$  Así,  $A-B = \{1\} \Rightarrow P(A-B) = P(\{1\}) = \{\phi, \{1\}\}$

pero  $P(A) = \{\phi, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\} \wedge P(B) = \{\phi, \{2, 3\}, \{2\}, \{3\}\}$

2.5  $\rightarrow$  Entonces  $(P(A) \setminus P(B)) \cup \{\phi\} = \{\{1, 2\}, \{1\}\} \cup \{\phi\} = \{\phi, \{1, 2\}, \{1\}\}$

2.5  $\rightarrow$  Por lo tanto  $P(A-B) = \{\phi, \{1\}\} \neq \{\phi, \{1, 2\}, \{1\}\} = (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\phi\}$ .